Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgaben
zur
Wahrscheinlichkeit

Beispielsammlung 4

Thema:

Abhängige und unabhängige Ereignisse

Datei Nr. 32101

Stand 2. Februar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Stochastische Abhängigkeit

Eine kurze Theorie mit Formeln und Einführungsbeispielen findet man im Text 32100.

4.1 Zweite Fremdsprache

Die Schülerzahlen im Fremdsprachenunterricht der Klassen 9a, 9b und 9c wurden in dieser Tabelle zusammengefasst:

	9a	9b und 9c	
Französisch	0	40	40
Latein	30	20	50
	30	60	90

Untersuche, ob die Ereignisse
F: Ein Schüler lernt Französisch
und
L: Ein Schüler lernt Latein
stochastisch unabhängig sind.

4.2 Studentenjob

Ein Medizinstudent will herausfinden, ob die Körpermerkmale blond (Ereignis B) und kurzsichtig (Ereignis K) voneinander unabhängig sind.

Dazu untersucht er 1000 Personen und erhält folgende Tabelle.

	blond	nicht blond	
kurzsichtig	30	270	
nicht kurzsichtig	70	630	
			1000

Bestimme das Ergebnis dieser Untersuchung.

4.3 Zweimal würfeln

Ein idealer Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Es sei:

A: Eine Drei im 1. Wurf

B: Eine Eins im 2. Wurf

C: Zwei gleiche Zahlen werden geworfen

D: Die Summe der beiden Zahlen ist ungerade

E: Die Summe der beiden Zahlen ist gerade.

a) Zeige, dass A und B unabhängig sind, C und D aber abhängig.

b) Untersuche die Unabhängigkeit von A und C, C und E, B und D.

4.4 Nur mal so

Ein Zufallsexperiment habe die Ergebnismenge S = {a ; b ; c ; d ; e} und die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

s_i	a	b	c	d	e
$P(\{s_i\})$	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

Sind die Ereignisse A = {c ; d} und B = {a ; d} unabhängig ?

4.5 Nur einmal würfeln

Ein idealer Würfel wird einmal geworfen. Sind folgende Ereignisse unabhängig?

A: Gerade Augenzahl
B: Die Augenzahl ist durch 3 teilbar
C: Die Augenzahl ist eine Primzahl.

4.6 Vater-Sohn-Beziehungen

Der Engländer GALTON (1822 – 1911) untersuchte den Zusammenhang der Augenfarbe an 1000 Vater-Sohn-Paaren. Es bedeuten:

A: Der Vater ist helläugig
B: Der Sohn ist helläugig.

Untersuche A und B auf Unabhängigkeit, wenn folgende Untersuchungsergebnisse gefunden worden sind:

	B	$\overline{B}$
A	471	151
$\overline{A}$	148	230

4.7 Brillenträger

Bei einem Sehtest achtjähriger Schulkinder einer Großstadt wurden 4445 Jungen und 4379 Mädchen untersucht. Man fand bei den Jungen 268 und bei den Mädchen 256 Brillenträger.

a) Stelle ein Carnaugh-Diagramm (Vierfeldertafel) auf und trage die prozentualen Häufigkeiten ein.

b) A: Ein Kind ist ein Junge
B: Ein Kind ist Brillenträger
Sind A und B unabhängige Ereignisse?

4.8 Skatkarten

Aus einem Skatspiel wird zufällig eine Karte gezogen. Stelle fest, welche der zwei folgenden Ereignisse unabhängig sind.

A: Die Karte trägt Herz

B: Die Karte zeigt einen Buben

C: Die Karte ist ein As

D: Man zieht 7, 8 oder 9.

4.9 Schüler

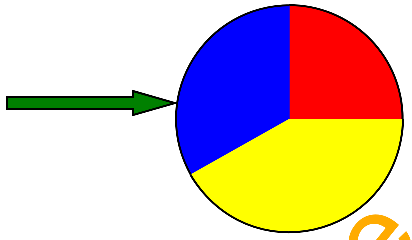
30% der Schüler einer Schule kommen mit dem Schulbus zur Schule. 40% lernen Französisch. 42% lernen weder Französisch noch benutzen sie einen Schulbus.

Sind die Ereignisse

S: Ein Schüler benutzt einen Schulbus
F: Ein Schüler lernt Französisch

stochastisch unabhängig?

4.10 Buntes Glücksrad



Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren.

Das rote Feld hat einen Innenwinkel von 90° und das blaue einen mit 120°.

Friederike dreht das Rad zweimal.

(Man darf davon ausgehen, dass der Pfeil nie auf der Trennlinie zwischen zwei dieser Farbsektoren stehen bleibt.)

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Der Pfeil zeigt zweimal auf blau

B: Der Pfeil zeigt genau einmal auf gelb

C: Der Pfeil zeigt nie auf gelb

D: Der Pfeil zeigt mindestens einmal auf gelb oder rot

E: Der Pfeil zeigt zweimal auf dieselbe Farbe

F: Der Pfeil zeigt zweimal auf verschiedene Farben

b) Untersuche, ob diese Ereignisse unabhängig sind:

(1) A und C

(2) E und F.

(3) B und D

4.11 Einfach A und B

Für zwei unabhängige Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Berechne $P(A)$ und $P(B)$.

4.12 Jetzt A, B und C

Gegeben sind die unabhängigen Ereignisse A und B, ferner ein Ereignis C, wobei C mit $A \cup B$ unvereinbar ist. (Das heißt, die Schnittmenge $C \cap (A \cup B)$ ist leer.)

Man kennt die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}1$ und $P(A \cup B \cup C) = 0{,}8$.

a) Zeichne ein geeignetes Venn-Diagramm zu den Mengen A, B und C.

b) Berechne $P(B)$.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
D: Weder A noch C,
E: Weder A noch B.
F: Entweder A oder C.

Wahrscheinlichkeiten von unabhängigen Fehlern

4.20 Defekte Bauteile

Die Firma Transist stellt elektronische Bauteile her, von denen auf Grund von Erfahrungswerten 5% defekt sind. Die Ursache können die Fehler A oder B sein. Ein Bauteil gilt als defekt, wenn mindestens einer dieser beiden Fehler eintritt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler B, wenn A mit 2% auftritt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten beide Fehler auf?

4.21 Gleich zwei Fehler

Bei der Herstellung eines Gerätes sind zwei Fehler aufgetreten. 15% der Produktion haben den Fehler F_1 und 10% den Fehler F_2. 82% der Geräte arbeiten fehlerfrei.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Gerät beide Fehler?

b) Treten die Fehler unabhängig voneinander auf?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist ein Gerät genau einen der beiden Fehler auf?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Gerät genau beide Fehler besitzt?

4.22 Ventile sind futsch

Bei der Herstellung von Ventilen können zweierlei Fehler auftreten. Fehler 1 tritt mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 in Erscheinung, Fehler 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,02.
Beide Fehler treten zusammen mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 auf. Ein Ventil gilt als defekt, wenn mindestens einer der beiden Fehler vorhanden ist.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:

D: Ein Ventil ist defekt

G: Bei einem Ventil tritt genau einer der beiden Fehler auf.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Ventil, das den Fehler 1 aufweist, auch den Fehler 2 und umgekehrt

c) Sind die beiden Fehler unabhängig voneinander?

4.23

Bei der Herstellung eines Tongefäßes durch Schüler in der Töpferei-Arbeitsgemeinschaft treten erfahrungsgemäß folgende Schäden auf:

F: Die Farbe blättert ab. R: Das Gefäß erhält einen Riss.

Der Farbfehler tritt mit 10% auf, der Riss mit 20%. 80 % der Gefäße sind in Ordnung.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten beide Fehler zugleich auf?
Sind diese Fehler voneinander **unabhängig**?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist ein zufällig ausgewähltes Gefäß genau einen der Fehler F oder R auf?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Gerät beide Fehler aufweist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe 1 dieses Kurses (8 Schüler) genau die Hälfte Gefäße fehlerhaft sind?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte der 8 geprüften Gefäße das 4. defekte ist?

4.24 Abitur 2009 MV

Bei der Herstellung von Balken werden zwei Fehler, Fehler **I** und Fehler **II**, registriert, die unabhängig voneinander auftreten. Der Fehler **I** wird erfahrungsgemäß bei 3 % aller Balken registriert, der Fehler **II** bei 5 %. Der laufenden Produktion wird auf gut Glück ein Balken entnommen und auf das Vorhandensein beider Fehler untersucht.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

A: Der Balken hat den Fehler **I**, aber nicht den Fehler **II**.

B: Bei dem Balken werden beide Fehler festgestellt.

C: Der Balken ist fehlerfrei.

3.2.2 Ermitteln Sie, wie viele fehlerfreie Balken man in einer Lieferung von 200 solcher Balken erwarten kann. Die Anzahl der fehlerfreien Balken kann als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

3.2.3 Berechnen Sie, wie hoch der Prozentsatz der Balken mit registriertem Fehler **II** sein müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerfreien Balkens bei sonst gleichen Bedingungen auf ca. 95 % steigt.

Lösungen

Lösung 4.1

Die Schülerzahlen im Fremdsprachenunterricht der Klassen 9a, 9b und 9c wurden in dieser Tabelle zusammengefasst:

	9a	9b und 9c	
Französisch	0	40	40
Latein	30	20	50
	30	60	90

Untersuche, ob die Ereignisse und stochastisch unabhängig sind.

F: Ein Schüler lernt Französisch
A: Ein Schüler besucht die 9a

Aus der Tabelle folgt: $P(F) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$, $P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$,

also erhält man $P(F) \cdot P(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \approx 0{,}148$.

Nun zur Schnittmenge $P(F \cap A) = \{\ \}$

Es keinen Schüler in der 9a, die Französisch lernt, also ist $P(F \cap A) = \frac{0}{90} = 0$.

Die Ereignisse F und A sind stochastisch abhängig, denn sonst müsste gelten $P(F \cap A) = P(F) \cdot P(A)$.

Man kann natürlich sagen, vielleicht wurden jetzt die Klassen nicht zufällig zusammengestellt sondern gezielt so wie sie sind, weil irgendein Organisationsschema dies verlangt. Hier sieht man, dass die 9a eine reine Lateinklasse ist und vermutlich ist die 9b gemischt L/F und die 9c rein Französisch.
Jetzt hat also der Zufall keinen Einfluss mehr, die Schulleitung hat die Ereignisse F und A abhängig gemacht. Dennoch kann auch bei zufälliger Einteilung ein Ergebnis entstehen, dass auf Abhängigkeit schließen lässt.